OPÇÕES CAMBIAIS: ESTRATÉGIA DE *HEDGE* E MODELOS DE PRECIFICAÇÃO

Katleen Claeys

Professora orientadora**:** Roseli da Silva

RESUMO

O objetivo deste trabalho é verificar se os resultados obtidos empiricamente com a aplicação do modelo teórico binomial de precificação de opções cambiais condizem com seu prêmio praticado no mercado. Para tanto, faz-se uma análise do funcionamento do mercado de derivativos brasileiro, especificando as estratégias dos *hedgers* na utilização de opções como uma forma de proteção contra a variabilidade da taxa de câmbio, principalmente após a mudança de regime cambial de início de 1999. Analisam-se, também, os fatores que influenciam na formação do prêmio das opções e a metodologia de cálculo desses prêmios por meio de dois modelos teóricos: Black e Scholes e binomial, ambos adaptados para as opções cambiais. Como resultado, foi verificado que o mercado adota tais modelos, sem evidências de arbitragem.

Palavras-chave: Opções; *Hedge* cambial; Modelo Garman e Kohlhagen; Modelo binomial

Abstract

The purpose of this study is to verify the empiricaly obtained results through the application of theorical evaluation models of exchange options agreeing with the prize of them performed on the market. Initially, it is done an analysis of of Brazilian operation derivatives market, specifying strategies of hedgers by making use of options as a protection condition against variability of rate of exchange, mainly after the change of exchange policy in the beginning of the year 1999. Furthermore, the factors which have influenced prize option formation and the methodology to calculate them have been analyzed by means of two theorical models: Black e Scholes and Binomial, both adapted for the exchange options. As result, it was verified that the market adopts such models without arbitrage possibilities.

Keywords: Options; Exchange hedge; Garman e Kohlhagen; Binomial model

INTRODUÇÃO

A análise das variáveis que influenciam os preços dos ativos do mercado financeiro tornou-se uma área de pesquisa de extrema relevância no mundo das finanças. Os investidores procuram, cada vez mais, estimar as distribuições de probabilidade dos possíveis valores dos ativos a fim de elaborar suas estratégias de negociação de acordo com seus objetivos. Os gestores de política econômica, principalmente o Banco Central, podem obter informações importantes a partir da observação dos preços de mercado de ativos financeiros, pois estes demonstram, além de variabilidade de oferta e demanda, as expectativas dos agentes com relação aos retornos esperados no futuro. As distorções observadas em certos preços podem indicar imperfeições e manipulações de mercado possivelmente relevantes e extremamente úteis para as tarefas de formulação e de condução da política monetária, com base nas expectativas.

Com o passar dos anos, as pesquisas têm aumentado o grau de complexidade com que essas expectativas podem ser avaliadas a partir dos preços dos ativos. O modelo teórico mais bem-sucedido e utilizado para precificação de opções foi desenvolvido por Black e Scholes em 1973 e á considerado uma extensão do modelo binomial; ambos,buscam estimar o valor do prêmio "justo" a ser praticado no mercado, segundo seus pressupostos teóricos.

O objetivo desta pesquisa é analisar o funcionamento do mercado de derivativos, especificando as estratégias dos *hedgers* na utilização de opções como uma forma de proteção contra a variabilidade da taxa de câmbio, ressaltando, assim, os fatores que influenciam na formação do prêmio das opções, a metodologia de cálculo desses prêmios por meio dos modelos de Black e Scholes e binomial (em suas extensões para as opções cambiais) e, principalmente, verificar se esses resultados condizem com o prêmio da opção cambial praticado no mercado.

Para tanto, faz-se necessário apresentar um breve histórico do surgimento do mercado de derivativos, direcionando o foco para o mercado de opções. Em seguida, faz-se uma análise sobre o conjunto de variáveis básicas que formam o valor ou prêmio das opções é apresentada. Para a demonstração do cálculo, são utilizados dois modelos teóricos: Garman e Kohlhagen (Black e Scholes para opções cambiais) e análise binomial.

Na terceira seção, são apresentadas as características do mercado de opções no Brasil desde 1998. Com base em um banco de dados, a hipótese será analisada verificando se ocorre discrepância entre o valor do prêmio da opção praticada pelo mercado e o valor do prêmio obtido pela utilização dos modelos teóricos, identificando os fatores que podem influenciar nessa distorção, caso haja.

REFERENCIAL TEÓRICO

O mercado de opções desenvolveu-se a partir de 1973 com a criação da Chicago Board Options Exchange (CBOE), mediante negociação de contratos de *call options* (opções de compra) sobre 16 ações. Na década de 1980, além das opções sobre ações, os contratos de opções se estenderam também aos instrumentos financeiros, como: opções sobre índices de ações, divisas, bônus, futuros de índices de ações, futuros de commodities, futuros de bônus do tesouro, e futuros de moedas. Na América Latina, as primeiras bolsas a iniciarem as negociações com opções foram as brasileiras. Os primeiros contratos foram de opções de ações, lançados na Bolsa de Valores do Rio de Janeiro (BVRJ) e na Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa), no início da década de 1970. Já as negociações com futuros e opções iniciaram ao final de 1984, na Bolsa Brasileira de Futuros (BBF), e no ano seguinte na Bolsa de Mercadorias & Futuros

(BM&F). Desde então, a popularidade desses contratos entre *hedgers* e especuladores tem aumentado com muita rapidez.

Sob o ponto de vista teórico, no preço de uma opção ou prêmio estão embutidos um conjunto de fatores: preço do ativo-objeto (S), preço de exercício da opção (K), prazo de vencimento da opção (T), taxa de juro sem risco (r_f) e a volatilidade do ativo-objeto (σ). O prêmio de uma opção é determinado pelo mercado e sofre influência das expectativas de cada um de seus participantes quanto ao comportamento futuro de certas variáveis. Uma das grandes dificuldades ao negociar uma opção é a mensuração e a avaliação dessas variáveis, tarefas fundamentais a qualquer *trader* de opções.

A mais famosa teoria sobre o valor de uma opção está apresentada no trabalho de Black e Scholes, conhecido como modelo de Black e Scholes. O modelo foi desenvolvido logo após o início das atividades do Chicago Board Options Exchange (CBOE), em 1973. Essa descoberta tem enorme influência na forma de precificar e de *hedgear* opções pelos participantes do mercado.

O primeiro e mais direto fator que influencia o prêmio de uma opção é o preço do ativo-objeto, ao qual a opção se relaciona fortemente. Para as opções de compra, quanto maior for o preço do ativo-objeto, considerando todos os outros parâmetros que influenciam o preço da opção (K, T, r_f e σ) constantes, maior será seu valor, isto é, se o preço do objeto aumenta, o prêmio da opção de compra também tem de subir. Assim, quanto maior o preço do ativo ao qual a opção se refere, maiores serão as possibilidades da opção ser exercida com lucro.

Nas opções de venda, o efeito é inverso: quanto menor o valor do ativo objeto, maior será o prêmio da opção de venda. Se o preço do objeto subir, o prêmio da opção de venda deverá cair, pois as possibilidades de exercer essa opção com lucro diminuem.

O prêmio da opção de compra será sempre maior ou igual a zero. A opção nunca será superior ao preço do ativo-objeto, sendo, portanto, seu limite máximo. Assim, temos:

$$\text{Preço do ativo-objeto} \geq \text{prêmio da opção de compra} \geq \text{zero}$$

$$\mathrm{S}\,t_o \geq C\,(S,\ t_o,\ K) \geq 0$$

em que C (S, t_o, K) explicita que os prêmios das opções são funções do preço do ativo-objeto S em sua data de vencimento, do período até o vencimento t_o e do respectivo preço de exercício K.

O valor das opções é definido na data de vencimento. Nessa data, o dono da opção de compra adquirirá o ativo-objeto pelo preço de exercício, ganhando $S^* - K$, se o valor do ativo-objeto na data de vencimento, S^*, for maior que o preço de exercício K. Se S^* for menor que K, ele abrirá mão de seu direito de exercício e nada receberá. Portanto, na data de vencimento temos (S^* é o valor do ativo-objeto na data de vencimento e max[.] é a função máximo)

$$C\,(S^*,\ T,\ K) = \max[0,\ S^* - K],\ \text{quando } T = 0$$

Por exemplo, na data de vencimento de uma opção de compra, com preço de exercício R$ 150,00, terá para valor o max[0, S^* - 150]. Ela terá valor zero se o preço do ativo-objeto for inferior ao preço de exercício, ou se o preço de exercício for menor que o do ativo, a opção valerá a diferença entre o preço do ativo e seu preço de exercício. Se, na data de vencimento, por exemplo, o preço do ativo-objeto for R$ 140,00, o valor da opção de compra será o max[0,-10], que, nesse caso, será zero. No entanto, se o preço do ativo for R$ 160,00, o valor da opção será o max[0,10], que é R$ 10,00.

A opção americana tem todas as propriedades da opção européia mais o direito de exercício antecipado. Como esse direito tem valor, o prêmio da opção de compra americana será, no mínimo, igual ao prêmio da opção de compra européia, ou seja:

$$C\ (S,\ T,\ K) \geq c\ (S,\ T,\ K)$$

em que C refere-se à opção de compra americana e c refere-se à européia.

Para as opções de compra americanas, existe uma oportunidade de arbitragem, pois o investidor pode adquirir a opção, exercê-la no momento que lhe for oportuno e vender depois o ativo no mercado, obtendo, assim, um ganho sem risco. Se o ativo-objeto estiver sendo negociado no mercado por R$ 110,00 e a opção de compra, com K = R$ 100,00, esteja sendo negociada por R$ 5,00, o investidor realiza a arbitragem comprando a opção e exercendo seu direito, gastando R$ 105,00. Ele pode vender o ativo por R$ 110,00 e lucrar R$ 5,00. Para evitar essa arbitrariedade, é necessário que o prêmio da opção de compra americana seja, no mínimo, o seu valor intrínseco, ou seja:

$$C\ (S,\ T,\ K) \geq \max[0,\ S - K]$$

A análise acima pode ser entendida de forma análoga para as opções de venda. No entanto, como as opções negociadas na BM&F não são do tipo americano, a possibilidade de arbitragem não se aplica.

Essas expressões demonstram o valor terminal das opções no instante T. O problema reside na avaliação do prêmio em momentos anteriores ao vencimento. Portanto, T passa a ser uma variável aleatória.

Um modelo de precificação de opções deve partir de algumas hipóteses sobre como os preços do ativo-objeto evoluem com o tempo, ou seja, se o preço de uma ação, por exemplo, é de R$ 50,00 hoje, qual é a distribuição de probabilidade do preço em um dia, em uma semana, em um mês ou em um ano?

A suposição que fundamenta o modelo de Black e Scholes é que os preços de um ativo-objeto e seu retorno seguem o conceito de "passeio aleatório" *(random walk)*, que se baseia na hipótese de eficiência do mercado. Isso significa que mudanças no preço do ativo-objeto são normalmente distribuídas, ou seja, os preços dos ativos são tais que sua história passada esteja plenamente refletida no preço presente e que os mercados respondem imediatamente a qualquer informação sobre um ativo. O conjunto dessas mudanças pode influenciar o preço do ativo, dando surgimento a diversas trajetórias dos preços em função do tempo. Esse conjunto de trajetórias é conhecido como processo estocástico.

Os contratos de opções futuros e outros derivativos existem em função dessa imprevisibilidade dos preços dos ativos na economia, ou seja, do caráter aleatório dos preços e dos retornos dos ativos. Partindo da hipótese de que o preço futuro é desconhecido, é necessário construir um modelo que apresente a *dinâmica dos preços ou retornos* do ativo-objeto na data de exercício. Supondo que os preços do ativo-objeto sigam uma distribuição lognormal, os parâmetros que descrevem seu comportamento são: μ, o retorno esperado do ativo-objeto; e σ, a volatilidade do preço do ativo-objeto.

O retorno esperado é a média anual de retorno obtida pelos investidores num curto período de tempo. Pode ser denotado por μ. A volatilidade é uma medida de nossa incerteza quanto a mudanças no preço do ativo-objeto. O parâmetro da volatilidade pode ser denotada como σ.

Uma variável com distribuição lognormal tem a propriedade de seu logaritmo natural ser normalmente distribuído. A suposição lognormal para os preços do ativo implica, portanto, que ln S_T seja normal, onde S_T é o preço do ativo num instante futuro, *T*.

A média e o desvio padrão de ln S_T são: $\ln S` + \left(\mu - \sigma^2/2\right)T$ e $\sigma\sqrt{T}$

O retorno esperado, μ, de um ativo depende do risco dele mesmo, ou seja, quanto maior o risco, maior o retorno. Também depende dos níveis das taxas de juro da economia. Quanto maior a taxa de juro livre de risco, maior o retorno esperado de qualquer ativo.

A característica aleatória da volatilidade do ativo-objeto que, neste trabalho, estará focado no dólar norte-americano, é a medida das variações esperadas dos preços futuros, tomando como base o histórico de preços e adotando uma média destes, caso o mercado repita as variações anteriores.

Quanto maior sua volatilidade, maior o valor das opções, tanto de compra (*calls*) como de venda (*puts*). A importância da volatilidade é a idéia de probabilidade do preço objeto estar acima ou abaixo do preço de exercício da opção no dia de seu exercício. Portanto, ela mede a probabilidade de uma opção ser exercida, podendo ser considerada uma medida do risco. A volatilidade do preço de um ativo é o desvio-padrão do retorno por ela fornecido em determinado período. Riscos e retornos possuem relação direta.

Um ativo com volatilidade muito baixa não deverá sofrer grandes alterações de preço no futuro, o que minimiza o risco na sua negociação. Os ativos que possuem oscilações grandes de preços são denominados “nervosos” ou “voláteis”, trazendo grande fator de risco.

Os compradores de uma opção sobre um objeto com grande volatilidade estarão dispostos a pagar mais por ela do que uma com baixa volatilidade. As possibilidades de lucro no primeiro caso são maiores do que no segundo, sendo que o risco para ambos estará limitado apenas ao prêmio pago.

Para exemplificar, assumimos que um ativo-objeto seja negociado por R$ 70,00 e que poderá valer no futuro apenas um dos dois valores: R$ 80,00 ou R$ 60,00. Uma opção de compra com preço de exercício de R$ 65,00 valerá, no vencimento, R$ 15,00 ou zero, respectivamente. Entretanto, se o ativo possuir maior volatilidade e puder valer no futuro R$ 100,00 ou R$ 40,00, a opção com o mesmo preço de exercício valerá no vencimento, R$ 35,00 ou zero. Nesse caso, a segunda opção terá um prêmio maior que a primeira, pois apresenta uma possibilidade de lucro maior.

A determinação do parâmetro da volatilidade de um ativo deve ser efetuada com base em históricos recentes e, preferencialmente, o maior número de observações possíveis a fim de minimizar o erro padrão.

A análise do retorno precedente desconsidera que o ativo distribua dividendos ou qualquer tipo de evento durante seu prazo de exercício, bem como os fatores de tributação.

Diante disso, Black e Scholes demonstraram que seria possível construir um *portfolio hedge* livre de risco (VH), consistindo de uma posição comprada no ativo e vendida na opção de compra (*call*) européia sobre o mesmo ativo. Se o preço do ativo mudar ao longo do tempo, o *hedge* pode ser mantido reajustando continuamente as proporções da *call* e do ativo. Dessa forma, o lucro ou perda da posição no ativo sempre compensa o lucro ou perda na posição da opção, de modo que o valor global da carteira, no final do período curto de tempo, esteja sempre de acordo com a taxa de juro livre de risco.

Para que uma posição permaneça sem risco, ela deve ser constantemente ajustada ou *rebalanceada*. Por exemplo, a relação entre Δc e ΔS pode alterar a qualquer instante. Não obstante, o retorno da carteira sem risco em qualquer período curto de tempo deve ser a taxa de juro livre de risco. Esse é o elemento-chave das teorias de Black e Scholes que leva suas fórmulas de precificação.

O valor desse *portfolio* pode ser expresso como a quantidade do ativo-objeto (Q_S) vezes o preço por ativo (*S*), mais a quantidade de calls (Q_C) vezes seu preço (*c*):

$$VH = S Q_S + c Q_C$$

A variação infinitesimal nesse *portfolio* pode ser definida a partir da derivada, como:

$$dVH = Q_S \, dS + Q_C \, dc$$

Como o preço da opção depende do preço do ativo-objeto, seu movimento ao longo do tempo deve estar relacionado ao movimento do preço do ativo subjacente, usando cálculo estocástico e aplicando uma técnica denominada lema de Ito, a partir da derivação da equação diferencial de Black e Scholes, discutida anteriormente:

$$dS = \mu S d_t + \sigma S d_Z$$

Para derivar a fórmula de precificação de opções, Black e Scholes partiram das seguintes hipóteses:

1. o comportamento do preço do ativo corresponde ao modelo lognormal desenvolvido anteriormente, com μ e σ constantes;

2. não há custos operacionais nem impostos; todos os títulos são perfeitamente divisíveis;

3. o ativo não receberá qualquer tipo de eventos durante a vida da opção;

4. não há oportunidades de arbitragem sem risco;

5. a negociação com títulos é contínua;

6. os investidores podem captar ou emprestar à mesma taxa de juro livre de risco;

7. a taxa de juro livre de risco de curto prazo, *r*, é constante.

A derivação da fórmula de Black e Scholes utiliza conceitos de cálculo estocástico que ultrapassam o grau de profundidade pretendido para este trabalho.

Para uma opção de compra, o prêmio justo por Black e Scholes é dado por:

$$c = S.N\left(d_1\right) - e^{-r_f(T-t)} X.N\left(d_2\right)$$

em que:

$$d_1 = \frac{\ln\left(S/X\right) + \left[r_f + \left(\sigma^2/2\right)\right]\left(T-t\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(S/X\right) + \left[r_f - \left(\sigma^2/2\right)\right]\left(T-t\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

A função $N(x)$ é a função de probabilidade acumulada de uma variável com distribuição normal padrão, N (0,1), seja menor que x, sendo assim: $N\left(-\infty\right) = 0$, $N(0) = 0{,}5$ *e* $N\left(+\infty\right) = 1$.

Para uma opção de venda (*put*), lembrando que esta será exercida somente se o preço de exercício exceder o preço à vista do ativo-objeto e se esse preço for infinito, a opção de venda vale zero (mudam as condições de contorno: $p = \text{Max}[0,\ S_t - S]$ e $p(S = \infty, T,\ S_t\ ) = 0$), o mesmo processo leva a seguinte fórmula de precificação:

$$p = e^{-r_t(T-t)} X.N\left(-d_2\right) - S.N\left(-d_1\right)$$

Em teoria, a fórmula de Black e Scholes só é válida quando a taxa de juro de curto prazo, *r*, é constante. Por isso ela é utilizada com a taxa de juro, *r*, sendo igual à taxa de juro livre de risco em um investimento com duração *T*.

Após a demonstração das hipóteses do modelo de Black e Scholes e em se tratando de opções sobre moedas, é necessário analisar uma variável extremamente importante, que é a taxa de juros internacional.

Considerando a variável *S* como o preço atual em dólares de uma unidade de moeda estrangeira, temos que esta proporciona a seu detentor uma taxa de juros livre de risco ao investir em um título dentro de seu país de origem.

Definimos r_f como o valor da taxa de juro internacional livre de risco e com capitalização contínua.

Consideramos que um investidor adote a seguinte estratégia:

1. compre $e^{-r_f T}$ da moeda estrangeira;
2. venda um contrato a termo de uma unidade de moeda estrangeira.

O investimento na moeda estrangeira atinge uma unidade no final do período *T*, conforme os juros recebidos. De acordo com o contrato a termo, isso será trocado por *F* (*forward option*) no final do período *T*. Essa estratégia conduz, portanto, a um desembolso inicial de *S* e a um recebimento final de *F*. O valor presente do que foi recebido deve ser igual ao do que foi gasto, ou seja:

$$Se^{-r_f T} = Fe^{-rT}$$

Sendo essa a relação de paridade de taxa de juro.

A moeda estrangeira é, portanto, análoga a um título que distribui dividendos. O dividendo é a taxa de juro livre de risco da moeda estrangeira (r_f).

Sendo assim, podemos concluir que o modelo de Black e Scholes não é adequado para o cálculo de opções sobre moeda, uma vez que temos a violação de uma de suas hipóteses básicas que se refere ao fato do ativo subjacente não pagar dividendos durante a vida útil da opção.

Diante disto, Garman e Kohlhagem desenvolveram uma adaptação ao modelo de Black e Scholes que contempla a avaliação da precificação de opções sobre moedas em mercados internacionais.

Para avaliar opções sobre moedas, definimos S como a taxa de câmbio à vista (*spot*). Assumimos que essa taxa de câmbio segue o mesmo tipo de processo estocástico que um ativo: o movimento browniano geométrico.

Definimos σ como a volatilidade da taxa de câmbio, r_f como a taxa de juro livre de risco internacional e r como a taxa de juro doméstica.

Os preços de uma opção de compra, c, e de venda, p, européias são dados por:

$$c = Se^{-r_f(T-t)}.N(d_1) - Xe^{-r(T-t)}.N(d_2)$$

$$p = Xe^{-r(T-t)}.N(-d_2) - Se^{-r_f(T-t)}.N(-d_1)$$

em que:

$$d_1 = \frac{\ln\left(S/X\right) + \left[r - r_f + \left(\sigma^2/2\right)\right](T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(S/X\right) + \left[r - r_f - \left(\sigma^2/2\right)\right](T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Outro modelo bastante utilizado na precificação de opções e de outros derivativos é o modelo binomial, baseado na análise de variáveis aleatórias discretas (enquanto o MBS é baseado em variáveis aleatórias contínuas).

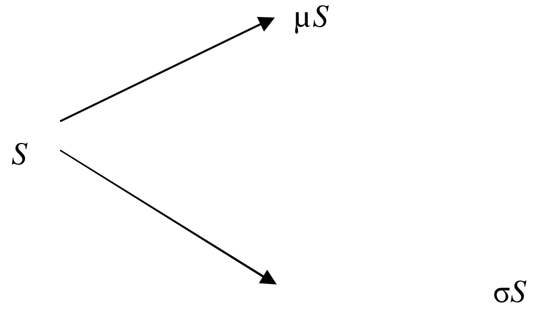
Segundo Wilmott, Howison e Dewynne (1997), o modelo binomial é baseado em duas hipóteses essenciais. A primeira delas é que uma variável aleatória contínua deve ser transformada em uma variável aleatória discreta de acordo com as seguintes propriedades:

- O preço do ativo-objeto S altera em tempo discreto até o seu vencimento: d_t, $2d_t$, $3d_t$,..., T. O termo d_t explicita a variação não-infinitesimal do tempo entre as alterações de preço;

- Se o valor do ativo é S_1 em t_1, então no tempo (t_1 + 1), este poderia assumir apenas duas possibilidades: $\mu S_1 > S_1$ ou $\sigma S_1 < S_1$. (Isso significa que, em um período de tempo, o preço do ativo pode mover *S* para cima - μ*S* ou para baixo – σ*S*. O ativo pode assumir apenas dois retornos *dS/S* possíveis em cada período: μ - 1 > 0 e σ – 1 < 0, e assim sucessivamente.

- A probabilidade de *p* de *S* mover-se para μ*S* é conhecida, enquanto a probabilidade de *S* mover-se para σ*S* será (1 – *p*).

Figura 1 - Movimento no preço do ativo de acordo com o modelo binomial



Considerando a avaliação de uma opção, primeiramente dividimos a vida desta num número maior de pequenos intervalos de tempo – Δ_t, sendo que, a cada intervalo, o preço do ativo sofre alteração. Então, a *árvore* de todas as possibilidades de preço do ativo é criada. Essa árvore é construída a partir de um valor inicial *S*, gerando as duas possibilidades de preços para o ativo (μ*S* e σ*S*) no primeiro intervalo, então as próximas possibilidades para o segundo intervalo serão: $\mu^2 S$, $\mu\sigma S = \sigma\mu S$ e $\sigma^2 S$, e assim sucessivamente até o último intervalo. A árvore binomial de *n* intervalos possui *n* + 1 possibilidades de preços.

A segunda hipótese refere-se à neutralidade ao risco, em que a preferência do investidor pelo risco é irrelevante. Sendo assim, o retorno de seu ativo está de acordo com a taxa de juro livre de risco.

No modelo binomial, é construída a árvore de possibilidades de valores para o ativo e suas probabilidades, a partir de um preço inicial do qual determinamos os possíveis preços do ativo até seu vencimento e as probabilidades de esse preços ocorrerem efetivamente. Com isso, é possível determinar a probabilidade de uma opção ser exercida ou não.

A equação que representa as expectativas dos valores para o ativo é dada por:

$$p\mu + (1-p)\sigma = e^{r\Delta t}$$

O desvio-padrão da mudança proporcional no preço de um ativo em um pequeno intervalo de tempo Δt é $\sigma\sqrt{\Delta t}$, o que significa que a variância da mudança em Δt é $S^2\sigma^2\Delta t$.

Efetuando algumas manipulações algébricas, temos a equação de duas variâncias:

$$p\mu^2 + (1-p)\sigma^2 = e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}$$

As duas equações anteriores são para determinar os parâmetros μ, σ e p.

No caso de esses parâmetros não serem conhecidos, temos duas alternativas; desde que Δt seja pequeno:

1. Adotar μ = 1/σ e substituir na equação (2.2), em que teremos os parâmetros μ, σ e *p*. Sendo que, se o modelo tiver um grande número de intervalos, p ou $(p-1)$ pode tornar-se negativo e, nesse caso, o modelo não pode ser utilizado. Note que, nesse caso, o histórico do preço do ativo é desconsiderado, ou melhor, perdido.

2. Adotar $p = ½$ e as variáveis μ e σ são determinadas. Nesse caso, as probabilidades de alta e de queda no preço do ativo-objeto são iguais e teremos que μσ > 1 (considerando $r > 0$ e Δt pequeno). Se o número de intervalos for grande, o parâmetro σ pode tornar-se negativo e o modelo não terá utilidade.

A expectativa do valor da opção em um intervalo antes do vencimento $(t-1)\,\Delta t$ e a possibilidade do preço do ativo S_n, onde n = 0, 1,....., $t-1$, pode ser encontrado desde que seja conhecida a probabilidade do preço do ativo subir, *p*, em um intervalo, e, conseqüentemente, a probabilidade de cair será $(1-p)$. Utilizando o princípio da neutralidade ao risco, podemos determinar o valor da opção e do ativo no intervalo $(T-1)$, calculando como o valor esperado no instante *T*, descontando à taxa *r* para um período de tempo Δt. Similarmente, o valor do ativo no intervalo $(T-2)$ pode ser calculado como o valor esperado no instante $(T-1)$, descontando à taxa *r* para o período de tempo Δt; e assim por adiante. Ao analisar a árvore de trás para frente, obteremos o valor da opção no instante zero.

Se a opção for do tipo americano, será necessário verificar cada nó da árvore para saber se o exercício antecipado é preferível à manutenção da opção por outro período de tempo posterior Δt.

A abordagem do modelo binomial para avaliar opções de ativos sem dividendos pode ser facilmente adaptada à avaliação de opções americanas de compra e de venda de um ativo com dividendos contínuos à taxa r_f.

No caso de opções de moedas, o dividendo é a taxa de juro estrangeira livre de risco.

Como esses dividendos fornecem um retorno r_f, o preço do ativo numa situação de indiferença ao risco deve, em média, proporcionar um retorno de $r-r_f$. A equação torna-se:

$$Se^{(r-rf)\Delta t} = pS\mu + (1-p)S\sigma \quad (2.1)$$

$$Se^{(r-rf)\Delta t} = pS\mu + (1-p)S\sigma$$

$$e^{(r-r_f)\Delta t} = p\mu + (1-p)\sigma$$

De modo que a equação (2.1) torna-se:

$$e^{(r-r_f)\Delta t} = p\mu + (1-p)\sigma$$

Portanto, o procedimento numérico da árvore binomial pode ser utilizado com eficiência no caso de opções de moedas.

Evidências para o mercado brasileiro

Para a aplicação desses modelos no caso brasileiro, utilizou-se um banco de dados constituído para as variáveis de entrada dos modelos, obtido via *Internet*. A Bolsa de Mercadorias e Futuros disponibiliza, em sua página (www.bmf.com.br), o Serviço de Recuperação de Informações. Por meio dele, qualquer usuário pode solicitar, via correio eletrônico, séries históricas disponíveis no banco de dados dos computadores da BM&F. Foram solicitados os dados referentes ao segundo semestre de 2002, pelo fato de ser o período mais recente desde o início deste trabalho.

Os dados fornecidos correspondem a séries históricas do Resumo Estatístico do Pregão. Os valores das opções de dólar apresentam cotações médias (prêmio praticado), preço à vista (*spot*), preço de exercício e prazo de vencimento.

Para o cálculo do prêmio por meio do modelo de Garman e Kohlhagen e do modelo binomial, foram utilizados históricos dos preços de venda (cotações de fechamento) do dólar comercial, informadas ao público no site do Banco Central do Brasil (www.bcb.gov.br), sendo que os mesmos valores são utilizados pela BM&F para a liquidação financeira dos seus contratos futuros e de opções. Além disso, foi necessário acrescentar ao banco de dados, o histórico da taxa de juro livre de risco – curva DI fornecida pela BM&F –, que pode ser encontrado também no *site* da BM&F.

Para efeito de comparação entre a taxa de juro livre de risco doméstica e internacional, foi necessário um banco de dados da taxa Prime, obtida no site do Federal Reserve (FED – USA).

Para obtenção dos prêmios por meio do modelo teórico de Garman e Kohlhagen e do modelo binomial, foi utilizado o *site*: www.risktech.com.br, em que há disponíveis macros em Excel para os referidos modelos, com adaptações para a taxa de juro internacional.

Como prática de mercado, foram considerados os valores de volatilidade implícita (*implied volatility*) da taxa de câmbio, que representam a expectativa que o mercado possui com relação à volatilidade futura do ativo objeto. Esse dado é obtido indiretamente, ou seja, por meio dos preços que o mercado negocia as opções. Para cada série de opções existe uma volatilidade implícita, gerando o que é conhecido como "*smile* de volatilidade", devido à forma do gráfico "preço de exercício x volatilidade" apresentado semelhante a um sorriso, na maior parte das vezes, em que as opções *at-the-money* apresentam as volatilidades mais baixas.

Com a constituição do banco de dados e a metodologia de cálculo adotada dentro da equação de Garman e Kohlhagem e do modelo binomial, foram extraídas 23 observações dos valores do prêmio das opções cambiais de venda (*put*) praticados no mercado segundo a BM&F referente ao segundo semestre de 2002. Os valores de volatilidade implícita (*implied volatility*) da taxa de câmbio representam a expectativa que o mercado possui com relação à volatilidade futura do ativo objeto. Esse dado é obtido indiretamente, ou seja, por meio dos preços que o mercado negocia as opções.

Com base nesses dados, temos abaixo tabela e respectivo gráfico comparativo dos valores do prêmio praticado no mercado, o valor dado pelo modelo de Garman e Kohlhagem (adaptação de Black e Scholes) e o prêmio dado pelo modelo binomial nesse período:

Tabela 1: Banco de dados, prêmios de mercado e teóricos (Reais por US$ 1.000,00)

Ativo	Data Referência	Data de Vencimento	Preço do Ativo	Preço de Exercício	Volatilidade	Taxa Cont. (r) % a.a.	Prazo (anos)	Prêmio mercado	Prêmio Modelo G&K	Prêmio Modelo Binomial
JA30	10/10/02	02/01/03	3923	3000	43,85%	19,07%	0,218254	30,000	30,000	29,280
NV46	15/10/02	01/11/02	3856	3500	57,53%	21,38%	0,051587	63,000	63,000	60,430
JA34	15/10/02	02/01/03	3856	3400	55,59%	23,01%	0,206349	172,000	172,000	170,770
JA30	18/10/02	02/01/03	3876	3000	46,92%	21,74%	0,194444	34,950	34,950	33,160
NV46	21/10/02	01/11/02	3912	3500	47,99%	20,34%	0,035714	17,620	17,620	16,700
NV46	22/10/02	01/11/02	3955	3500	48,16%	20,31%	0,031746	11,000	11,000	10,790
JA39	22/10/02	02/01/03	3955	3500	54,71%	21,35%	0,186508	162,000	162,000	160,040
NV46	23/10/02	01/11/02	3870	3500	42,49%	19,92%	0,027778	9,083	9,080	8,950
NV46	24/10/02	01/11/02	3862	3500	38,63%	19,89%	0,023810	4,500	4,500	3,910
NV46	25/10/02	01/11/02	3801	3500	38,16%	19,79%	0,019841	5,250	5,250	4,920
DZ33	31/10/02	02/12/02	3645	3400	37,22%	19,83%	0,083333	58,000	58,000	56,070
DZ33	01/11/02	02/12/02	3611	3400	33,57%	19,72%	0,079365	51,710	69,000	67,300
DZ29	04/11/02	02/12/02	3542	3000	20,86%	19,73%	0,075397	0,100	0,100	0,070
JA37	06/11/02	02/01/03	3598	2500	33,24%	20,76%	0,142857	0,200	0,200	0,080
JA39	29/11/02	02/01/03	3636	3500	31,66%	20,80%	0,079365	69,000	51,710	49,340
JN50	29/11/02	02/06/03	3636	2800	26,01%	24,42%	0,484127	17,000	17,000	16,560
JA39	04/12/02	02/01/03	3705	3500	36,27%	21,25%	0,067460	56,000	56,000	54,300
JA39	05/12/02	02/01/03	3751	3500	29,25%	21,50%	0,063492	24,500	24,500	23,900
FE45	05/12/02	03/02/03	3751	3400	30,23%	22,44%	0,150794	45,500	45,500	44,720
JA39	19/12/02	02/01/03	3504	3500	22,06%	22,61%	0,023810	45,000	45,000	43,850
JA36	23/12/02	02/01/03	3495	2400	30,00%	22,69%	0,015873	0,100	0,000	0,000
JA37	23/12/02	02/01/03	3495	2500	30,00%	22,69%	0,015873	0,100	0,000	0,000
FE45	27/12/02	03/02/03	3541	3400	28,54%	22,86%	0,095238	62,667	62,660	62,340

CONCLUSÃO

Os testes de precificação de opções demonstram que as opções dentro do dinheiro e/ou fora do dinheiro aparentam ser mal precificadas em comparação com as opções no dinheiro. Essa distorção ocorre devido à volatilidade do ativo que não é determinada corretamente pelo modelo de Black e Scholes, já que o mesmo pressupõe que a volatilidade seja constante. Esses vieses podem ser explicados pelas diferenças entre a distribuição lognormal adotada pelo modelo e a distribuição real.

A Tabela 1 permite verificar também que os valores do prêmio encontrados pelo modelo de Black e Scholes adaptado à taxa de juro internacional (Garman e Kohlhagem) e pelo modelo binomial condizem com o valor praticado pelo mercado para opções de venda (*put*) selecionadas para análise. Pode-se dizer, assim, que o mercado brasileiro utiliza-se do modelo adaptado de Black e Scholes para a precificação das opções, bem como o modelo binomial. Este último apresenta diferenças irrelevantes, porém não é muito utilizado para opções com prazo de vencimento maiores, já que representa maior número de passos nesse caso.

Isso demonstra que tanto o modelo de Garman e Kohlhagem como o modelo binomial são eficientes na precificação do prêmio das opções cambiais.

Considerando que a arbitragem consiste numa operação financeira em que se obtém uma posição comprada ou vendida (a descoberto) em diferentes ativos, de forma que haja um retorno positivo, qualquer que seja o estado da natureza, no período seguinte, podemos concluir que não foram obtidas evidências quanto à oportunidade de arbitragem com os prêmios praticados para as opções cambiais, por parte dos agentes no período analisado. Sendo assim, podemos dizer que o preço praticado pelo mercado é "justo", no sentido de ser o prêmio teórico, mesmo considerando as hipóteses fortes adotadas pelos modelos, principalmente aquela referente à volatilidade do ativo objeto ser constante ao longo do tempos. Embora fora dos objetivos deste trabalho, há que se considerar que este é um ponto que remete a uma discussão no âmbito da metodologia em economia: irrealismo das hipóteses *versus* capacidade de explicação dos fenômenos reais,

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BODIE, Z.; KANE, A.; MARCUS, A. J. *Fundamentos de investimentos.* Porto Alegre: Bookman, 2000.

BOLSA DE VALORES DE SÃO PAULO. *Mercado de Derivativos*: como atuar no mercado de opções. Disponível em: http://www.bovespa.com.br, Acesso em: 15 jun. 2003.

BOLSA DE MERCADORIAS & FUTUROS *Relatórios de desempenho dos mercados, volume anual, contratos negociados.* Disponível em: <http://www.bmf.com.br/>. Acesso em: 25 ago. 2003.

DUARTE JR., A. M. *Uma estratégia dinâmica para o* hedge *ótimo de opções exóticas no mercado financeiro brasileiro.* Texto para Discussão do IPEA. Disponível em: <http://www.ipea.gov.br/>, 2000.

FRALETTI, P. B. Cálculo financeiro das tesourarias: bancos e empresas. In: SECURATO, José Roberto (Coord.). *Estrutura temporal das taxas de juros em dólar no mercado doméstico.* São Paulo, 1997.

HULL, J. *Options, futures, and other derivatives.* 3. ed. Upper-Saddle River: Prentice-Hall, University of Toronto, 1997.

LEMGRUBER, E. F. *Avaliação de contratos de opções.* São Paulo: BM&F, 1995.

LION, O. M. B.; COSENZA, C. A. N.; NEVES, C. *aplicação do modelo de Black, Derman & Toy à precificação de opções sobre títulos de renda fixa.* Trabalhos para discussão do Banco Central do Brasil, n. 74. Disponível em: <http://www.bancocentral.gov.br/>, 2003. Acesso em: 25 ago 2003.

VARGA, G. *Cálculo de Preço de Opção de Compra para o Mercado Brasileiro.* Notas de Aula Disponível em: http://www.fce.com.br/, 2000. Acesso em:. 25 ago 2003.

WILMOTT, P.; HOWISON, S.; DEWYNNE, J. *The mathematics of financial derivatives.* Cambridge: Cambridge University Press, 1997.